RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 19 ottobre 1902.

Matematica. — *Determinazione delle superficie algebriche, su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecantisi.* Nota di Ugo Amaldi, presentata dal Corrispondente Guido Castelnuovo.

Su di una superficie algebrica si dice, notoriamente, *fascio* un sistema di curve, tale che per un punto generico della superficie passi *una* curva del sistema. In questa breve Nota io mi propongo di risolvere il seguente problema, di cui debbo l'idea al ch. sig. prof. Enriques: *Determinare tutte le superficie algebriche, su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecantisi*, cioè tali che la curva generica di uno qualsiasi fra codesti fasci intersechi in *un* punto la curva generica di ogni altro fra essi.

Sia una superficie algebrica, su cui esistano (almeno) tre fasci (C_1), (C_2), (C_3) di curve algebriche unisecantisi. Cominciamo col ripetere qui una considerazione, che il sig. Enriques ha applicato nel risolvere « *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* » (1).

Considerata una curva generica c_1 del fascio (C_1), si associ ad essa un'altra qualsiasi curva c'_1 del medesimo fascio: per un punto A arbitrario

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. II, 1893.

di c_1 passa *una* curva del fascio (C_2), la quale interseca la c'_1 in un punto; e per questo passa *una* curva del fascio (C_3), la quale interseca la c_1 in un punto A'. Se sulla c_1 facciamo corrispondere al punto A il punto A', otteniamo, al variare di A, una corrispondenza fra i punti di c_1, la quale è algebrica e biunivoca, cioè birazionale. Se allora, tenuta fissa la c_1, facciamo variare nel fascio (C_1) la curva c'_1, concludiamo che la curva c_1 ammette su sè stessa una semplice infinità continua di trasformazioni birazionali; onde, per un notissimo teorema dello Schwarz ([1]), risulta che la c_1 è una curva di genere *zero* o di genere *uno*.

Poichè il medesimo ragionamento si può applicare anche alle curve generiche dei fasci (C_2) e (C_3) abbiamo intanto che *i tre fasci* (C_1), (C_2), (C_3) *sono costituiti ciascuno da curve razionali o ellittiche.*

Ma, facendo corrispondere su due curve qualsiansi di diverso fascio i punti di intersezione con una medesima curva variabile nel fascio rimanente, troviamo che due curve quali si vogliano, appartenenti a due fasci diversi, sono fra loro in corrispondenza birazionale, onde si conclude che *le curve dei tre fasci sono tutte insieme o razionali o ellittiche.*

Il primo caso si può senz'altro considerare come esaurito, come quello che, per un classico teorema del Nöther ([2]) conduce alle superficie razionali, sulle quali esistono infinite reti omaloidiche di curve. Si può notare che sopra una superficie razionale tre fasci quali si vogliano di curve unisecantisi appartengono a *due* reti omaloidiche, come nel piano rappresentativo tre fasci di rette appartengono alla rete delle rette e a quella delle coniche pei tre vertici di essi.

Passiamo ad esaminare il caso di una superficie algebrica S, su cui esistano (almeno) tre fasci (C_1), (C_2), (C_3) di curve ellittiche unisecantisi. Fissate due curve c_1, c_2 appartenenti a due fasci diversi, p. es. a (C_1), (C_2), ogni punto P della superficie S determina in (C_1), (C_2) due curve passanti per esso e intersecanti l'una la c_2, l'altra la c_1 in *un* punto: cioè ad ogni punto P di S corrisponde *una* coppia di punti appartenenti l'uno a c_1, l'altro a c_2. Reciprocamente, è del pari manifesto che ad ogni coppia di punti siffatti corrisponde *un* punto della superficie S, cioè la intersezione della curva di (C_2) passante per il punto scelto su c_1 e della curva di (C_1) passante per il punto scelto su c_2.

Di qui risulta che per avere una rappresentazione parametrica della superficie S basterà rappresentare le due curve c_1, c_2. Ma codeste due curve sono ellittiche entrambi, e fra loro in corrispondenza birazionale: onde si potranno rappresentare sopra due cubiche piane γ e γ' identiche, la cui rap-

([1]) Crelle, Bd. LXXXVII.

([2]) Mathematische Annalen, Bd. 3.

presentazione parametrica, per mezzo della p del Weierstrass, sarà

$$x = p(u), \quad y = p'(u)$$

e

$$z = p(v), \quad t = p'(v).$$

La superficie S sarà allora trasformabile birazionalmente nella superficie S′, che, in uno spazio a quattro dimensioni di coordinate cartesiane x, y, z, t, è data dalle equazioni

$$x = p(u), \quad y = p'(u), \quad z = p(v), \quad t = p'(v),$$

ove si facciano variare i punti complessi u, v, l'uno indipendentemente dall'altro, nel parallelogramma dei periodi $2\omega, 2\omega'$ della p considerata.

Su codesta superficie S′ ai due fasci (C_1), (C_2) di S corrispondono i due fasci di curve unisecantisi $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$. Per determinare gli altri fasci di curve unisecanti le $u = \text{cost}$ e le $v = \text{cost}$, notiamo, come già si è fatto più sopra, che ogni fascio siffatto stabilisce una corrispondenza birazionale tra una qualsiasi curva $u = \text{cost}$, e una qualsiasi $v = \text{cost}$, e dà luogo quindi ancora ad una trasformazione birazionale della cubica γ in sè stessa. Ma è noto che, se il modulo $\frac{\omega}{\omega'}$ della cubica γ è generale, codesta curva ammette in sè stessa due schiere di trasformazioni birazionali, dipendenti ciascuna da una costante arbitraria, le quali, ove v designi il parametro del punto trasformato, sono rappresentate da [1]

$$v = u + \text{cost}, \quad v = -u + \text{cost}. \tag{1}$$

Ora è manifesto che codeste due equazioni, lineari in u e v, rappresentano su S′ due fasci di curve unisecanti sia fra loro, come rispetto alle $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$.

Perchè la cubica γ ammetta in sè stessa altre trasformazioni birazionali oltre le (1), è necessario e sufficiente che il suo modulo $\frac{\omega}{\omega'}$ abbia un valore singolare, cioè precisamente sia uguale o all'unità immaginaria o ad una radice cubica primitiva dell'unità.

Se il modulo è uguale a $\pm i$, cioè se la funzione ellittica p è *armonica* (o *lesmiscatica*), la γ ammette in sè stessa, oltre le due schiere di trasformazioni (1), le altre due

$$v = \pm iu + \text{cost};$$

[1] Cfr. p. es. Appell-Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, pag. 474.

ed è ancora manifesto che queste due equazioni rappresentano, in tal caso, su S′ un quinto e un sesto fascio di curve unisecanti fra loro e rispetto a ciascuno dei fasci

(2) $$u = \text{cost}\,,\quad v = \text{cost}\,,\quad v = \pm u + \text{cost}\,.$$

Se infine, indicando con ε una radice cubica primitiva della unità, il modulo della cubica γ è uguale ad ε (o ad ε^2), cioè se la funzione ellittica p è *equianarmonica*, la γ ammette in sè stessa oltre le (1) altre quattro schiere continue di trasformazioni birazionali

(3) $$v = \pm \varepsilon u + \text{cost}\,,\quad v = \pm \varepsilon^2 u + \text{cost}\,.$$

Riferendoci alla superficie S′, abbiamo che in tal caso esistono su di essa oltre i fasci (2) altri quattro fasci di curve, unisecantisi fra loro e rispetto ai (2), i quali sono rappresentati dalle (3).

Concludendo, *una superficie algebrica, su cui esistano più di due fasci di curve algebriche unisecantisi, o contiene infiniti fasci siffatti* (costituiti da curve razionali) *ed è razionale, oppure si può trasformare birazionalmente in una superficie dello spazio a quattro dimensioni, rappresentabile mediante la* p *del Weierstrass sotto la forma*

$$x = p(u)\,,\quad y = p'(u)\,,\quad z = p(v)\,,\quad t = p'(v)\,.$$

In quest'ultimo caso, se la p *è a modulo generale, la superficie contiene quattro fasci di curve ellittiche unisecantisi*

(2) $$u = \text{cost}\,,\quad v = \text{cost}\,,\quad v = \pm u + \text{cost}\,.$$

Se invece la p *è a moltiplicazione complessa, secondochè essa è armonica o equianarmonica, la superficie contiene sei od otto fasci di curve ellittiche unisecantisi. Nel primo caso codesti fasci sono rappresentati dalle* (2) *e dalle*

$$v = \pm iu + \text{cost}\,;$$

nel secondo caso sono rappresentati dalle (2) *e dalle*

$$v = \pm \varepsilon u + cost\,,\quad v = \pm \varepsilon^2 u + \text{cost}\,,$$

dove ε *designi una radice cubica primitiva dell'unità.*

Fisica matematica. — *La teoria di Hertz applicata alla determinazione del campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme d'una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito.* Nota di G. PICCIATI, presentata dal Corrispondente RICCI.

In una Nota recente [1] il prof. T. Levi-Civita ha dimostrato che il problema generale dell'induzione elettrodinamica resta univocamente determinato entro l'àmbito della teoria hertziana pura. Infatti gli elementi (condizioni ai limiti) che apparivano mancanti perchè le particolari questioni da lui risolute risultassero matematicamente determinate, si possono derivare da un passaggio al limite, mediante il quale si riconosce il comportamento delle forze elettromagnetiche nell'attraversare una superficie conduttrice. Seguendo la nuova via tracciata dal prof. Levi-Civita mi sono proposto la risoluzione di una delle questioni da lui già trattate [2], cioè la determinazione del campo elettromagnetico generato da una carica elettrica che si muove con velocità costante su di una retta parallela ad un piano conduttore indefinito. L'esposizione dei resultati, ottenuti in modo relativamente semplice, forma oggetto della presente Nota; essi sono esattamente coincidenti con quelli assegnati per l'altra via dal Levi-Civita.

Si consideri un dielettrico indefinito impolarizzabile ed in quiete ed il campo elettromagnetico generato da una carica in moto di traslazione uniforme. Indicando con X', Y', Z' le componenti della forza elettrica, e con L', M', N' quelle della forza magnetica esse sono soluzioni del sistema

$$
\text{(I)}\quad \begin{cases} A\dfrac{dL}{dt}=\dfrac{dZ}{dy}-\dfrac{dY}{dz}, \\[2mm] A\dfrac{dM}{dt}=\dfrac{dX}{dz}-\dfrac{dZ}{dx}, \\[2mm] A\dfrac{dN}{dt}=\dfrac{dY}{dx}-\dfrac{dX}{dy}; \end{cases}
\qquad
\text{(II)}\quad \begin{cases} A\dfrac{dX}{dt}=\dfrac{dM}{dz}-\dfrac{dN}{dy}, \\[2mm] A\dfrac{dY}{dt}=\dfrac{dN}{dx}-\dfrac{dL}{dz}, \\[2mm] A\dfrac{dZ}{dt}=\dfrac{dL}{dy}-\dfrac{dM}{dx}, \end{cases}
$$

e delle due

$$
\text{(III)}\quad \frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}=0, \qquad \text{(IV)}\quad \frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0,
$$

indicando A l'inversa della velocità della luce nell'etere.

(1) *La teoria elettrodinamica di Hertz di fronte ai fenomeni di induzione.* Rendiconti Accademia Lincei, vol. XI, 2° sem., 1902, pag. 75.

(2) *Sur le champ électromagnétique* etc.. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, ser. III, t. IV, 1902.

Riferendoci ad un sistema di assi mobili $\xi\ \eta\ \zeta$ invariabilmente legati ad m, le cui coordinate sono rispetto a questi 0, 0, $d > 0$ sono note (1) le espressioni di X', Y', Z', L', M', N'.

Si ha cioè:

$$\begin{cases} X' = -m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{\varDelta}\right), & Y' = -m\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{\varDelta}\right), \quad Z' = -m\dfrac{d}{d\zeta}\left(\dfrac{1}{\varDelta}\right), \\ L' = 0 & M' = -ma\dfrac{d}{d\zeta}\left(\dfrac{1}{\varDelta}\right), \quad N' = ma\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{\varDelta}\right), \end{cases}$$

avendosi

$$\varDelta^2 = \xi^2 + (1-a^2)[\eta^2 + (\zeta - d)^2]\ , \quad a = cA\ ,$$

essendo c la velocità di traslazione della carica.

Introducendo dei conduttori nel campo, questo rimane evidentemente modificato; supponiamo si tratti di una superficie piana conduttrice parallela alla traslazione della carica, e sia il piano $\zeta = 0$, che indicheremo con σ. Indichiamo con X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 le componenti delle forze elettromagnetiche di induzione, e con X, Y, Z, L, M, N quelle del campo così modificato: avremo

$$X = X' + X_1\ , \quad Y = Y' + Y_1\ , \quad Z = Z' + Z_1\ ,$$

$$L = L' + L_1\ , \quad M = M' + M_1\ , \quad N = N' + N_1\ .$$

Le $X_1 \ldots\ldots N_1$ debbono essere soluzioni del sistema (I)...(IV), regolari in ogni punto dello spazio fuori di σ e nulle all' infinito come $\dfrac{1}{r^2}$ almeno $(r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$.

In un generico punto della superficie conduttrice σ le $X' \ldots\ldots N'$ si comportano regolarmente, invece le $X \ldots\ldots N$, ossia le $X_1 \ldots N_1$, debbono presentare attraverso la superficie i caratteri seguenti (2):

1. Le componenti tangenziali della forza elettrica (indotta) rimangono continue anche attraverso la superficie.

2. Le componenti tangenziali della forza magnetica (indotta) subiscono, quando si attraversa la superficie nel senso della normale positiva, le discontinuità

$$\delta L = -\frac{4\pi}{AR}Y\ , \quad \delta M = \frac{4\pi}{AR}X\ ,$$

ossia anche

$$(1) \qquad \begin{cases} \delta L_1 = -\dfrac{4\pi}{AR}Y_1 - \dfrac{4\pi}{AR}Y'\ , \\ \delta M_1 = \dfrac{4\pi}{AR}X_1 + \dfrac{4\pi}{AR}X'\ , \end{cases}$$

(1) Vedi per es. Mem. cit.. Annales de Toulouse, pag. 26.

(2) Vedi Mem. cit., *La teoria elettrodinamica di Hertz* ecc., pag. 77.

essendo R la resistenza unitaria della superficie valutata in unità elettromagnetiche.

Dovendosi determinare le $X_1 \dots N_1$ integrali del sistema (I)...(IV), regolari fuori del piano σ, e per i quali le condizioni caratteristiche sul piano stesso si riferiscono alle componenti tangenziali, si può scindere la ricerca in due parti cioè:

1. Determinazione di X_1, Y_1, L_1, M_1.
2. Determinazione delle componenti Z_1, N_1.

Quest' ultima determinazione è immediata esigendo solo due quadrature; infatti dal sistema (I)...(IV) si ottiene:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} &= A\frac{dY_1}{dt} + \frac{dL_1}{dz}, \\ \frac{dN_1}{dy} &= \frac{dM_1}{dz} - A\frac{dX_1}{dt}, \\ \frac{dN_1}{dz} &= -\left(\frac{dL_1}{dx} + \frac{dM_1}{dy}\right), \\ A\frac{dN_1}{dt} &= \frac{dY_1}{dx} - \frac{dX_1}{dy}, \end{aligned}\right. \qquad (3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dx} &= -A\frac{dM_1}{dt} + \frac{dX_1}{dz}, \\ \frac{dZ_1}{dy} &= A\frac{dL_1}{dt} + \frac{dY_1}{dz}, \\ \frac{dZ_1}{dz} &= -\left(\frac{dX_1}{dx} + \frac{dY_1}{dy}\right), \\ A\frac{dZ_1}{dt} &= \frac{dL_1}{dy} - \frac{dM_1}{dx}. \end{aligned}\right.$$

Le combinazioni differenziali delle prime terne sono identicamente soddisfatte in virtù delle equazioni stesse del sistema; le combinazioni di una terna con la quarta corrispondente lo sono in virtù del sistema stesso (I)...(IV), e dell'equazione

$$(V)\qquad \Box f = A^2\frac{d^2f}{dt^2} - \Delta_2 f = 0,$$

a cui soddisfanno gli integrali del sistema.

Il problema è quindi ridotto a questo: determinare quattro funzioni X_1, Y_1, L_1, M_1 soddisfacenti alla (V), regolari fuori del piano conduttore σ; attraversando il piano σ le X_1, Y_1 rimangono continue, mentre le L_1, M_1 subiscono discontinuità caratterizzate dalle (1)

Il fenomeno essendo stazionario rispetto agli assi $\xi\ \eta\ \zeta$, le funzioni cercate non dipenderanno esplicitamente dal tempo ma solo da $\xi\ \eta\ \zeta$, avendosi

$$\xi = x - ct\ ,\ \eta = y\ ,\ \zeta = z\ .$$

Avremo quindi $A\dfrac{d}{dt} = -a\dfrac{d}{dx}$ e perciò

$$\Box f = \bigcirc f = (1 - a^2)\frac{d^2f}{d\xi^2} + \frac{d^2f}{d\eta^2} + \frac{d^2f}{d\zeta^2} = 0,$$

equazione indefinita a cui debbono soddisfare le funzioni cercate.

Di queste le L_1, M_1 si possono considerare come derivate rispetto a ζ di potenziali ritardati (corrispondenti a distribuzione di superficie sul

piano $\zeta = 0$); con questo esse soddisfanno all'equazione indefinita $\bigcirc f = 0$, sono regolari fuori del piano e subiscono attraverso a questo una discontinuità. Posto quindi

$$L_1 = \frac{dV_1}{d\zeta}\ , \quad M_1 = -\frac{dU_1}{d\zeta}\ ,$$

essendo V_1 ed U_1, per le loro espressioni analitiche sotto forma di integrali estesi al piano σ, funzioni dell'argomento $|\zeta|$, avremo, attraverso il piano σ,

$$\delta L_1 = 2\frac{dV_1}{d|\zeta|}\ , \quad \delta M_1 = -2\frac{dU_1}{d|\zeta|}\ .$$

Le condizioni caratteristiche (1) prendono quindi la forma

$$2\frac{dV_1}{d|\zeta|} = -\frac{4\pi}{AR}Y_1 - \frac{4\pi}{AR}Y'\ ,$$

$$-2\frac{dU_1}{d|\zeta|} = \frac{4\pi}{AR}X_1 + \frac{4\pi}{AR}X'\ .$$

Posto $AR = k$ e sostituendo ad X', Y' le note espressioni si ha

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{k}{2\pi}\frac{dV_1}{d|\zeta|} + Y_1 = m\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\varDelta}\right), \\ &\frac{k}{2\pi}\frac{dU_1}{d|\zeta|} + X_1 = m(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\varDelta}\right), \end{aligned} \right.$$

relazioni che debbono essere soddisfatte in tutti i punti del piano $\zeta = 0$: a queste, come mostra il sig. Levi-Civita (¹), se ne possono sostituire altre due valevoli in tutto lo spazio. Se si osserva che X_1, Y_1 si possono pure considerare come potenziali ritardati (corrispondenti a distribuzione di superficie sul piano $\zeta = 0$) quindi funzioni di $|\zeta|$ e continue attraverso il piano, si può dire che i primi membri delle (4) sono funzioni di ξ, η, $|\zeta|$ olomorfe per tutti i valori reali di ξ. η, $|\zeta| > 0$, riducentisi rispettivamente a $m\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\varDelta}\right)$ ed $m(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\varDelta}\right)$ per $\zeta = 0$, e verificanti l'equazione $\bigcirc f = 0$. Anche le funzioni $m\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\varDelta}\right)$, $m(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\varDelta}\right)$ soddisfanno a tutte queste condizioni quando in esse si ponga $-|\zeta|$ in luogo di ζ, con che si toglie la singolarità nel punto m.

Ponendo quindi

$$r^2 = \xi^2 + (1-a^2)\left[\eta^2 + (|\zeta| + d)^2\right],$$

si può alle (4), valevoli sul piano $\zeta = 0$, sostituire quest'altre valevoli in tutto lo spazio

(¹) Vedi Mem. cit., Annales de Toulouse, pag. 27.

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dV_1}{d|\zeta|}+Y_1=m\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{r}\right), \\ \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|\zeta|}+X_1=m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{r}\right). \end{cases}$$

A queste due equazioni che legano le X_1, Y_1, U_1, V_1 se ne aggiungono altre due che derivano dalle (2) e (3). Si ha infatti dalle (2)

$$-a\frac{dN_1}{dx}=\frac{dY_1}{dx}-\frac{dX_1}{dy},$$

ossia

$$-a\left(-a\frac{dY_1}{dx}+\frac{dL_1}{dz}\right)=\frac{dY_1}{dx}-\frac{dX_1}{dy},$$

e quindi

$$(1-a^2)\frac{dY_1}{dx}-\frac{dX_1}{dy}+a\frac{dL_1}{dz}=0;$$

analogamente dalle (3) si ottiene:

$$(1-a^2)\frac{dM_1}{dx}-\frac{dL_1}{dy}-a\frac{dX_1}{dz}=0.$$

A queste due equazioni si può dare questa forma

$$(6)\qquad \begin{cases} (1-a^2)\dfrac{dY_1}{d\xi}-\dfrac{dX_1}{d\eta}+a\dfrac{d^2V_1}{d\zeta^2}=0, \\ (1-a^2)\dfrac{d^2U_1}{d\xi\, d\zeta}+\dfrac{d^2V_1}{d\eta\, d\zeta}+a\dfrac{dX_1}{d\zeta}=0. \end{cases}$$

Si ricava dalle (5)

$$(7)\qquad \begin{cases} X_1=m\,(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{r}\right)-\dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|\zeta|}, \\ Y_1=m\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{r}\right)-\dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dV_1}{d|\zeta|} \end{cases}$$

le quali sostituite nelle (6) danno

$$(8)\qquad \begin{cases} (1-a^2)\dfrac{d^2V_1}{d\xi\, d|\zeta|}-\dfrac{d^2U_1}{d\eta\, d|\zeta|}-\dfrac{a\,2\pi}{k}\dfrac{d^2V_1}{d|\zeta|^2}=0, \\ (1-a^2)\dfrac{d^2U_1}{d\xi\, d|\zeta|}+\dfrac{d^2V_1}{d\eta\, d|\zeta|}-\dfrac{ak}{2\pi}\dfrac{d^2U_1}{d|\zeta|^2}=-a\,m(1-a^2)\dfrac{d^2}{d\xi\, d|\zeta|}\left(\dfrac{1}{r}\right), \end{cases}$$

equazioni a cui debbono soddisfare U_1 e V_1. Integrandole rispetto a $|\zeta|$ da un valore qualunque fino all'infinito, annullandosi i due membri per $|\zeta|=\infty$, si ha

$$(9)\qquad \begin{cases} (1-a^2)\dfrac{dV_1}{d\xi}+\dfrac{dU_1}{d\eta}-\dfrac{a2\pi}{k}\dfrac{dV_1}{d|\zeta|}=0, \\ (1-a^2)\dfrac{dU_1}{d\xi}+\dfrac{dV_1}{d\eta}-\dfrac{ak}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|\zeta|}=-a\,m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{r}\right). \end{cases}$$

Dalla prima delle (9) ricavando $\frac{dU_1}{d\eta}$ e sostituendolo nella seconda, derivata rispetto ad η, si ottiene

$$(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left\{(1-a^2)\frac{dV_1}{d\xi}-\frac{a2\pi}{k}\frac{dV_1}{d|\zeta|}\right\}+\frac{d^2V_1}{d\eta^2}-$$

$$-\frac{ak}{2\pi}\frac{d}{d|\zeta|}\left\{(1-a^2)\frac{dV_1}{d\xi}-\frac{a2\pi}{k}\frac{dV_1}{d|\zeta|}\right\}=-am(1-a^2)\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

dalla quale, tenendo conto che $OV_1=0$, si ricava per V_1 l'equazione

$$(10)\qquad a^2\frac{d^2V_1}{d\xi^2}+\frac{d^2V_1}{d|\zeta|^2}+\left(\frac{a2\pi}{k}+\frac{ak}{2\pi}\right)\frac{d^2V_1}{d\xi\, d|\zeta|}=am\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Essa si può scrivere, ponendo $G_1=\frac{a2\pi}{k}\frac{dV_1}{d\xi}+\frac{dV_1}{d|\zeta|}$, sotto la forma

$$(10')\qquad \frac{ak}{2\pi}\frac{dG_1}{d\xi}+\frac{dG_1}{d|\zeta|}=am\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

e l'integrazione di questa si può effettuare nel modo indicato dal Levi-Civita (¹).

Ponendo

$$\tau^2=\left(\xi+\frac{ak}{2\pi}\mu\right)^2+(1-a^2)\left[\eta^2+(|\zeta|+d+\mu)^2\right]$$

con μ indeterminata, si ha

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=0}=\frac{1}{r}\quad,\quad\left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=\infty}=0\quad,\quad O\frac{1}{\tau}=0$$

ed inoltre

$$\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\mu}=\frac{ak}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}+\frac{d\frac{1}{\tau}}{d(\zeta)},$$

quindi la funzione $-ma\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu$ soddisfa alla (10′). Essa soddisfa inoltre alla $Of=0$, a cui pure deve soddisfare la G_1, ed al pari di questa si comporta regolarmente per tutti i valori reali di $\xi\ \eta\ \zeta$ avendo solo una discontinuità normale per $\zeta=0$.

La differenza $G_1-\left(-ma\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu\right)$, che dovrebbe essere funzione di $\xi-\frac{ak}{\lambda\pi}|\zeta|$, dovendo soddisfare alla $Of=0$ ed annullarsi all'infinito, è quindi identicamente nulla, e si ha perciò

$$G_1=-ma\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu\,.$$

(¹) Vedi Mem. cit., Annales de Toulouse, pag. 29.

Avendosi ora per V_1 l'equazione

$$(10'') \qquad a\frac{dV_1}{d\xi}+\frac{k}{2\pi}\frac{dV_1}{d|\zeta|}=-\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{r}\right)d\mu$$

poniamo

$$\theta^2=\left(\xi+\frac{ak}{2\pi}\mu+a\nu\right)^2+(1-a^2)\left[\eta^2+\left(|\zeta|+d+\mu+\frac{k}{2\pi}\nu\right)^2\right],$$

essendo ν una nuova indeterminata.

Si ha in questo caso

$$\left(\frac{1}{\theta}\right)_{\nu=0}=\frac{1}{r},\ \left(\frac{1}{\theta}\right)_{\nu=\infty}=0\,,\ O\frac{1}{\theta}=0$$

$$\frac{d\frac{1}{\theta}}{d\nu}=a\frac{d\frac{1}{\theta}}{d\xi}+\frac{k}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\theta}}{d|\xi|}.$$

Si riconosce quindi che l'espressione

$$(11) \qquad V_1=\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\int_0^\infty \frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{\theta}\right)d\nu$$

è una soluzione della $(10'')$ e l'unica soddisfacente a tutte le altre condizioni a cui V_1 è soggetta.

Per U_1 si ottiene con procedimento analogo dalle (9) l'equazione

$$(12) \qquad a^2\frac{d^2U_1}{d\xi^2}+\frac{d^2U_1}{d|\zeta|^2}+\left(\frac{a2\pi}{k}+\frac{ak}{2\pi}\right)\frac{d^2U_1}{d\xi\, d|\zeta|}=$$
$$=am(1-a^2)\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{a^2m2\pi}{k}\frac{d^2}{d\xi\, d|\zeta|}\left(\frac{1}{r}\right)$$

della quale la soluzione unica soddisfacente alle condizioni date è

$$(13) \quad U_1=-\frac{ma^2k}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu-\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\int_0^\infty \frac{d^2}{d\eta^2}\left(\frac{1}{\theta}\right)d\nu-\frac{am}{r}.$$

Ottenute le espressioni di U_1 e V_1 possiamo stabilire le espressioni delle componenti tangenziali delle forze elettromagnetiche. Si ha per X_1 l'espressione data dalle (7) che si può scrivere

$$X_1=m(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{mak}{2\pi}\frac{d}{d|\zeta|}\int_0^\infty \frac{ak}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi}d\mu+$$
$$+\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\int_0^\infty \frac{d^2}{d\eta^2}\left(\frac{k}{2\pi}\frac{d\frac{1}{\theta}}{d|\zeta|}\right)d\nu+\frac{akm}{2\pi}\frac{d}{d|\zeta|}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Se si ricorda ora che si ha

$$\frac{ak}{2\pi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)=\frac{d}{d\mu}\left(\frac{1}{\tau}\right)-\frac{d}{d|\zeta|}\left(\frac{1}{\tau}\right)$$
$$\frac{k}{2\pi}\frac{d}{d|\zeta|}\left(\frac{1}{\theta}\right)=\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\theta}\right)-a\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\theta}\right)$$

ed inoltre

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=0}=\frac{1}{r},\left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=\infty}=0\ ,\ \left(\frac{1}{\theta}\right)_{\nu=0}=\frac{1}{\tau},\left(\frac{1}{\theta}\right)_{\nu=\infty}=0$$

la precedente diviene

$$\mathrm{X}_1=m(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d^2}{d|\zeta|^2}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu-\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d^2}{d\eta^2}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu-$$
$$-\frac{ma^2k}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\int_0^\infty\frac{d^3}{d\eta^2\,d\xi}\left(\frac{1}{\theta}\right)d\nu$$

e quindi, essendo $\bigcirc\dfrac{1}{\tau}=0$, si ha

$$\mathrm{X}_1=m(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{mak}{2\pi}(1-a^2)\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu-$$
$$-\frac{ma^2k}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\int_0^\infty\frac{d^3}{d\eta^2\,d\xi}\left(\frac{1}{\theta}\right)d\nu$$

A questa, come all'analoga espressione di Y_1, si può dare la forma esattamente coincidente con quella assegnata per l'altra via dal prof. Levi-Civita, ottenendo per le componenti tangenziali

$$(14)\qquad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{X}_1&=\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu+\frac{m}{r}\right\}+a\frac{d\mathrm{U}_1}{d\xi},\\
\mathrm{Y}_1&=\frac{d}{d\eta}\left\{\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu+\frac{m}{r}\right\}+a\frac{d\mathrm{V}_1}{d\xi},\\
\mathrm{L}_1&=\frac{d\mathrm{V}_1}{d\zeta},\\
\mathrm{M}_1&=-\frac{d\mathrm{U}_1}{d\zeta}.
\end{aligned}\right.$$

Restano ad ottenere le componenti normali Z_1 ed N_1, che si hanno con quadrature dalle (2) e (3). Si ha dalle (2)

$$\frac{d\mathrm{N}_1}{d\xi}=-am\frac{d^2}{d\xi\,d\eta}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{ak}{2\pi}\frac{d^2\mathrm{V}_1}{d\xi\,d|\zeta|}+\frac{d^2\mathrm{V}_1}{d|\zeta|^2}=$$
$$=-a^2\frac{d^2\mathrm{V}_1}{d\xi^2}-\frac{a2\pi}{k}\frac{d^2\mathrm{V}_1}{d\xi\,d|\zeta|}=\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\mathrm{U}_1}{d\eta}-\frac{d\mathrm{V}_1}{d\xi}\right),$$

e questo tenendo conto delle (10) e (9).

Così pure si ha

$$\frac{d\mathrm{N}_1}{d\eta}=\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\mathrm{U}_1}{d\eta}-\frac{d\mathrm{V}_1}{d\xi}\right),$$
$$\frac{d\mathrm{N}_1}{d\zeta}=\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{d\mathrm{U}_1}{d\eta}-\frac{d\mathrm{V}_1}{d\xi}\right)$$

e quindi

$$N_1 = \frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi}.$$

In modo analogo si ha dalle (3)

$$Z_1 = -\frac{d}{d\zeta}\left\{-\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\mu - \frac{m}{r}\right\}$$

restando così determinate tutte le componenti $X_1 \ldots\ldots N_1$ delle forze elettromagnetiche di induzione.

V. C.